Les développements en série entière

∑ Vers le SUP
Lycée – Supérieur

Lemme d'Abel

Si $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{R}$ avec $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Proposition

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

- Si $|z| < R$ la série $\sum a_n z^n$ converge absolument
- Si $|z| > R$ la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement
- Si $|z| = R$ on ne peut pas conclure en général

Développements usuels

Fonction	Développement en série entière	Domaine
e^x	$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{n} x^k$	$]-1;1[$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k+1}$	$]-1;+\infty[$
$\sin(x)$	$\sum_{k=0}^{n} (-1)^n \times \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$]-1;1[$
$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^{n} (-1)^n \times \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$]-1;1[$
$sh(x)$	$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$
$ch(x)$	$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$